9 класс, ВАРИАНТ 15

1. [3 балла] Решите неравенство $\left(\frac{(x-5)^2+4}{|x-5|}-4\right)(|x-4|+|x-6|-2)\leqslant 0$.

   Ответ: $\{3\}\cup[4;5)\cup(5;6]\cup\{7\}$.

   Решение. Выражение в первых скобках равно $\frac{(|x-5|-2)^2}{|x-5|}$ (так как $(x-5)^2=|x-5|^2$), поэтому оно определено при $x\neq 5$, неотрицательно и обращается в ноль только при $|x-5|=2$, то есть при $x=3$ и $x=7$. Заметим, что $|x-4|+|x-6|$ – это сумма расстояний от точки x до точек 4 и 6 на числовой прямой, поэтому выражение во вторых скобках обращается в ноль при $x\in[4;6]$ и положительно при остальных x. Таким образом, неравенство выполнено тогда и только тогда, когда один из множителей в левой части обращается в ноль. С учётом ОДЗ получаем, что $x\in\{3\}\cup[4;5)\cup(5;6]\cup\{7\}$.

2. [3 балла] Решите систему уравнений $\begin{cases}x+\sqrt{x^2-25y^2}=50,\\ 5y+\sqrt{x^2-25y^2}=1.\end{cases}$

   Ответ: $(29;-4)$.

   Решение. Складывая и вычитая уравнения, получаем систему

$$\begin{cases}(x+5y)+2\sqrt{(x-5y)(x+5y)}=51,\\ x-5y=49\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+5y)+2\sqrt{(7^2)(x+5y)}=51,\\ x-5y=7^2,\end{cases}$$

   равносильную исходной. Пусть $\sqrt{x+5y}=t$. Тогда первое уравнение новой системы принимает вид $t^2+14t-51=0$. Его корнями являются числа -17 и 3. Так как отрицательное значение t не подходит, то $t=3$. Значит,

$$\begin{cases}x+5y=9,\\ x-5y=49\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=29,\\ y=-4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Биссектрисы внутреннего и внешнего угла A треугольника ABC пересекают прямую BC в точках M и N соответственно. Окружность, описанная вокруг треугольника AMN, касается стороны AB в точке A. Найдите радиус окружности, угол ACB и площадь треугольника ABN, если известно, что $AB=3$, $BM=1$.

   Ответ: $\angle ACB=90^\circ$, $R=4$, $S_{ABN}=\frac{54}{5}$.

   Решение. Обозначим $\angle BAC=2\alpha$. Тогда смежный с ним угол равен $180^\circ-2\alpha$, а далее имеем $\angle NAC=\frac{1}{2}(180^\circ-2\alpha)=90^\circ-\alpha$, $\angle CAM=\alpha$, $\angle MAN=90^\circ-\alpha+\alpha=90^\circ$. Так как окружность описана около прямоугольного треугольника AMN, его гипотенуза MN является диаметром, а середина гипотенузы P – центром окружности. Ввиду того, что BA касается окружности в точке A, $\angle BAP=90^\circ$, откуда $\angle CAP=90^\circ-2\alpha$. Так как медиана AP равна половине гипотенузы MN, треугольник AMP равнобедренный ($AP=MP$), а значит, $\angle AMP=\angle MAP=\alpha+90^\circ-2\alpha=90^\circ-\alpha$, поэтому $\angle ACM=180^\circ-\angle CAM-\angle CMA=180^\circ-\alpha-(90^\circ-\alpha)=90^\circ$.

   По теореме о касательной и секущей $BA^2=BM\cdot BN$, следовательно, $BN=9$, $MN=BN-BM=8$, радиус окружности R равен $\frac{MN}{2}=4$. Отрезок AC – высота прямоугольного треугольника ABP. Выражая его площадь двумя способами, имеем $AC\cdot BP=AB\cdot AP$, поэтому $AC=\frac{12}{5}$. Значит, $S_{ABN}=\frac{1}{2}\cdot BN\cdot AC=\frac{54}{5}$.

4. [5 баллов] Вписанная окружность остроугольного треугольника ABC касается сторон AC и AB в точках E и D. Точка Y – основание перпендикуляра, опущенного из точки E на AB, а X – вторая точка пересечения EY со вписанной окружностью треугольника ABC. Найдите радиус этой окружности, если площадь треугольника AXD равна 12, а $5AD=6EY$.

Ответ: $\frac{12}{\sqrt{5}}$.

Решение. Пусть O – центр окружности. Обозначим $\angle BAC = 2\alpha$. Так как центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, то $\angle OAC = \alpha$. Касательные, проведённые к окружности из одной точки, равны между собой, следовательно, $AD = AE$, $\angle ADE = \angle AED = \frac{1}{2}\left(180^\circ - 2\alpha\right) = 90^\circ - \alpha$. Из прямоугольного треугольника DEY имеем $\angle DEY = 90^\circ - \angle EDY = \alpha$. Также отметим, что $\angle XDY$ равен половине дуги DX как угол между касательной и хордой, а $\angle DEX$ равен половине этой же дуги как вписанный угол, на неё опирающийся, т.е. $\angle DXY = \alpha$.

Из полученного выше равенства углов следует, что треугольники AOD, DXY, EDY подобны (они прямоугольные с острым углом, равным α). Из этого подобия следует, что $\frac{OD}{AD} = \frac{XY}{DY} = \frac{DY}{EY}$. Из второго равенства $DY = \sqrt{XY \cdot EY} = \sqrt{XY \cdot \frac{5}{6}AD} = \sqrt{\frac{5}{6} \cdot 2S_{\triangle ADX}} = 2\sqrt{5}$. Но тогда из первого соотношения следует, что $DO = \frac{AD}{EY} \cdot DY = \frac{6}{5} \cdot 2\sqrt{5} = \frac{12}{\sqrt{5}}$.

5. [5 баллов] На доске выписано $10n$ последовательных натуральных чисел ($n \in \mathbb{N}$). Из них выбираются три попарно различных числа, среди которых ровно одно кратно 2 и ровно одно кратно 5. Известно, что можно составить ровно 5 112 таких троек. Чему равно n?

Ответ: 6.

Решение. Среди $10n$ последовательных натуральных чисел есть ровно n чисел, кратных 10; n чисел, кратных 5, но не кратных 2, и $4n$ чисел, кратных 2, но не кратных 5. Количество чисел, не делящихся ни на 5, ни на 2, равно $4n$. Если в тройке присутствует число, кратное 10, то остальные два числа не делятся ни на 2, ни на 5. Следовательно, таких троек $n \cdot C_{4n}^2$. Оставшиеся тройки не содержат чисел, кратных 10. Значит, в них нужно включить одно число, делящееся только на 5 (n способов), одно число, делящееся только на 2 ($4n$ способов) и одно число, не делящееся ни на 5, ни на 2 ($4n$ способов) – получаем $n \cdot 4n \cdot 4n = 16n^3$ троек. Таким образом, $n \cdot C_{4n}^2 + 16n^3 = 5112$, откуда $n = 6$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} 2y + 3x \geqslant |2y - 3x|, \\ y \leqslant -2x + 16, \\ x^2 - 12y + y^2 + 16 \geqslant 0 \end{cases}$$

Ответ: $64 - 10\pi$.

Решение. Первое неравенство при $2y \geqslant 3x$ сводится к $6x \geqslant 0$, а при $2y < 3x$ к $2y \geqslant 0$. Поэтому множество точек, удовлетворяющих этому неравенству, есть объединение двух множеств: в первом лежат все точки выше прямой $y = \frac{3}{2}x$ с неотрицательными абсциссами (включая точки на прямой), а во втором лежат все точки ниже этой прямой (не включая точки на ней) с неотрицательными ординатами. Объединение этих множеств есть первая координатная четверть ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$).

Второе неравенство определяет полуплоскость, находящуюся ниже прямой $y = -2x + 16$ (включая точки на прямой). Первые два неравенства вместе определяют прямоугольный треугольник с вершинами $A(0;0)$, $B(8;0)$, $C(0;16)$. Наконец, третье неравенство может быть записано в виде $x^2 + (y-6)^2 \geqslant 20$, и оно задаёт внешность окружности с центром $P(0;6)$ и радиусом $2\sqrt{5}$.

Поскольку система уравнений $x^2 + (y-6)^2 = 20$, $y = -2x + 16$ имеет ровно одно решение $(4;8)$, окружность касается гипотенузы треугольника, поэтому внутри треугольника ABC оказывается половина круга.

Искомая площадь равна площади треугольника без половины площади круга: $S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 16 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(2\sqrt{5}\right)^2 = 64 - 10\pi$.

7. [5 баллов] Найдите количество шестизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые две последовательные степени числа десять равна 1234.

Ответ: 180.

Решение. Пусть искомое число есть $\overline{abcdef}$ $(a \neq 0)$. Определим, какой может быть максимальная степень десятки, на которую происходит деление. Возможны несколько случаев.

- а) Если максимальная степень десятки 3 или меньше, то сумма остатков меньше $10^3 + 10^2$, что меньше 1234.
- б) Если максимальная степень десятки 6 или больше, то сумма остатков не меньше $a \cdot 10^5$, что больше 1234.
- в) Максимальная степень десятки равна 4 или 5. Эти случаи возможны.

1) Пусть максимальная степень десятки равна 4. Тогда остатки от деления на 10^4, 10^3 равны соответственно $\overline{cdef}$, $\overline{def}$. И сумма остатков есть $c \cdot 10^3 + 2S$, где $S = \overline{def}$, $0 \leqslant S < 1000$.

Рассмотрим уравнение $c \cdot 10^3 + 2S = 1234$. Так как $1234 < 2 \cdot 10^3$, то либо $c = 0$, либо $c = 1$. Если $c = 0$, то $2S = 1234$, откуда $S = 617$. То есть число имеет вид $\overline{ab0617}$. Таких чисел 90. Если $c = 1$, то $2S = 234$, откуда $S = 117$. То есть число имеет вид $\overline{ab1117}$. Таких чисел 90.

2) Пусть максимальная степень десятки равна 5. Тогда остатки от деления на 10^5, 10^4 равны соответственно $\overline{bcdef}$, $\overline{cdef}$. И сумма остатков есть $b \cdot 10^4 + 2S$, где $S = \overline{cdef}$, $0 \leqslant S < 10000$.

Рассмотрим уравнение $b \cdot 10^4 + 2S = 1234$. Это возможно только при $b = 0$. Значит, $2S = 1234$, откуда $S = 617$. То есть число имеет вид $\overline{a00617}$. Но эти числа уже посчитаны в случае 1.

Значит, искомое количество шестизначных чисел есть $90 + 90 = 180$.

9 класс, ВАРИАНТ 16

1. [3 балла] Решите неравенство $\left(\frac{(x-1)^2+9}{|x-1|}-6\right)(|x-3|+|x|-3) \leqslant 0$.

Ответ: $\{-2\} \cup [0;1) \cup (1;3] \cup \{4\}$.

Решение. Выражение в первых скобках равно $\frac{(|x-1|-3)^2}{|x-1|}$ (так как $(x-1)^2=|x-1|^2$), поэтому оно определено при $x \neq 1$, неотрицательно и обращается в ноль только при $|x-1|=3$, то есть при $x=-2$ и $x=4$. Заметим, что $|x-3|+|x|$ – это сумма расстояний от точки x до точек 3 и 0 на числовой прямой, поэтому выражение во вторых скобках обращается в ноль при $x \in [0;3]$ и положительно при остальных x. Таким образом, неравенство выполнено тогда и только тогда, когда один из множителей в левой части обращается в ноль. С учётом ОДЗ получаем, что $\{-2\} \cup [0;1) \cup (1;3] \cup \{4\}$.

2. [3 балла] Решите систему уравнений $\begin{cases} x+\sqrt{x^2-16y^2}=32, \\ 4y+\sqrt{x^2-16y^2}=23. \end{cases}$

Ответ: $(17;2)$.

Решение. Складывая и вычитая уравнения, получаем систему

$$\begin{cases} (x+4y)+2\sqrt{(x-4y)(x+4y)}=55, \\ x-4y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4y)+2\sqrt{(3^2)(x+4y)}=55, \\ x-4y=3^2, \end{cases}$$

равносильную исходной. Пусть $\sqrt{x+4y}=t$. Тогда первое уравнение новой системы принимает вид $t^2+6t-55=0$. Его корнями являются числа -11 и 5. Так как отрицательное значение t не подходит, то $t=5$. Значит,

$$\begin{cases} x+4y=25, \\ x-4y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=17, \\ y=2. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Биссектрисы внутреннего и внешнего угла A треугольника ABC пересекают прямую BC в точках M и N соответственно. Окружность, описанная вокруг треугольника AMN, касается стороны AB в точке A. Найдите радиус окружности, угол ACB и площадь треугольника ABN, если известно, что $AB=\sqrt{5}$, $BM=2$.

Ответ: $\angle ACB=90^\circ$, $R=\frac{1}{4}$, $S_{ABN}=\frac{5\sqrt{5}}{36}$.

Решение. Обозначим $\angle BAC=2\alpha$. Тогда смежный с ним угол равен $180^\circ-2\alpha$, а далее имеем $\angle NAC=\frac{1}{2}(180^\circ-2\alpha)=90^\circ-\alpha$, $\angle CAM=\alpha$, $\angle MAN=90^\circ-\alpha+\alpha=90^\circ$. Так как окружность описана около прямоугольного треугольника AMN, его гипотенуза MN является диаметром, а середина гипотенузы P – центром окружности. Ввиду того, что BA касается окружности в точке A, $\angle BAP=90^\circ$, откуда $\angle CAP=90^\circ-2\alpha$. Так как медиана AP равна половине гипотенузы MN, треугольник AMP равнобедренный ($AP=MP$), а значит, $\angle AMP=\angle MAP=\alpha+90^\circ-2\alpha=90^\circ-\alpha$, поэтому $\angle ACM=180^\circ-\angle CAM-\angle CMA=180^\circ-\alpha-(90^\circ-\alpha)=90^\circ$.

По теореме о касательной и секущей $BA^2=BM\cdot BN$, следовательно, $BN=\frac{5}{2}$, $MN=BN-BM=\frac{1}{2}$, радиус окружности R равен $\frac{MN}{2}=\frac{1}{4}$. Отрезок AC – высота прямоугольного треугольника ABP. Выражая его площадь двумя способами, имеем $AC\cdot BP=AB\cdot AP$, поэтому $AC=\frac{\sqrt{5}}{9}$. Значит, $S_{ABN}=\frac{1}{2}\cdot BN\cdot AC=\frac{5\sqrt{5}}{36}$.

4. [5 баллов] Вписанная окружность остроугольного треугольника ABC касается сторон AC и AB в точках E и D. Точка Y – основание перпендикуляра, опущенного из точки E на AB, а X – вторая точка пересечения EY со вписанной окружностью треугольника ABC. Найдите радиус этой окружности, если площадь треугольника AXD равна 5, а $2AD=3EY$.

Ответ: $\sqrt{15}$.

Решение. Пусть O – центр окружности. Обозначим $\angle BAC = 2\alpha$. Так как центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, то $\angle OAC = \alpha$. Касательные, проведённые к окружности из одной точки, равны между собой, следовательно, $AD = AE$, $\angle ADE = \angle AED = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\alpha) = 90^\circ - \alpha$. Из прямоугольного треугольника DEY имеем $\angle DEY = 90^\circ - \angle EDY = \alpha$. Также отметим, что $\angle XDY$ равен половине дуги DX как угол между касательной и хордой, а $\angle DEX$ равен половине этой же дуги как вписанный угол, на неё опирающийся, т.е. $\angle DXY = \alpha$.

Из полученного выше равенства углов следует, что треугольники AOD, DXY, EDY подобны (они прямоугольные с острым углом, равным α). Из этого подобия следует, что $\frac{OD}{AD} = \frac{XY}{DY} = \frac{DY}{EY}$. Из второго равенства $DY = \sqrt{XY \cdot EY} = \sqrt{XY \cdot \frac{2}{3}AD} = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot 2S_{\triangle ADX}} = \sqrt{\frac{20}{3}}$. Но тогда из первого соотношения следует, что $DO = \frac{AD}{EY} \cdot DY = \frac{3}{2} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \sqrt{15}$.

5. [5 баллов] На доске выписано $6n$ последовательных натуральных чисел ($n \in \mathbb{N}$). Из них выбираются три попарно различных числа, среди которых ровно одно кратно 2 и ровно одно кратно 3. Известно, что можно составить ровно 5 900 таких троек. Чему равно n?

Ответ: 10.

Решение. Среди $6n$ последовательных натуральных чисел есть ровно n чисел, кратных 6; n чисел, кратных 3, но не кратных 2, и $2n$ чисел, кратных 2, но не кратных 3. Количество чисел, не делящихся ни на 3, ни на 2, равно $2n$. Если в тройке присутствует число, кратное 6, то остальные два числа не делятся ни на 2, ни на 3. Следовательно, таких троек $n \cdot C_{2n}^2$. Оставшиеся тройки не содержат чисел, кратных 6. Значит, в них нужно включить одно число, делящееся только на 3 (n способов), одно число, делящееся только на 2 ($2n$ способов) и одно число, не делящееся ни на 3, ни на 2 ($2n$ способов) – получаем $n \cdot 2n \cdot 2n = 4n^3$ троек. Таким образом, $n \cdot C_{2n}^2 + 4n^3 = 5900$, откуда $n = 10$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} 4y + 7x \geqslant |4y - 7x|, \\ y \leqslant -3x + 15, \\ x^2 - 10y + y^2 + 15 \geqslant 0 \end{cases}$$

Ответ: $\frac{75}{2} - 5\pi$.

Решение. Первое неравенство при $4y \geqslant 7x$ сводится к $14x \geqslant 0$, а при $4y < 7x$ к $8y \geqslant 0$. Поэтому множество точек, удовлетворяющих этому неравенству, есть объединение двух множеств: в первом лежат все точки выше прямой $y = \frac{7}{4}x$ с неотрицательными абсциссами (включая точки на прямой), а во втором лежат все точки ниже этой прямой (не включая точки на ней) с неотрицательными ординатами. Объединение этих множеств есть первая координатная четверть ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$).

Второе неравенство определяет полуплоскость, находящуюся ниже прямой $y = -3x + 15$ (включая точки на прямой). Первые два неравенства вместе определяют прямоугольный треугольник с вершинами $A(0; 0)$, $B(5; 0)$, $C(0; 15)$. Наконец, третье неравенство может быть записано в виде $x^2 + (y - 5)^2 \geqslant 10$, и оно задаёт внешность окружности с центром $P(0; 5)$ и радиусом $\sqrt{10}$.

Поскольку система уравнений $x^2 + (y - 5)^2 = 10$, $y = -3x + 15$ имеет ровно одно решение $(3; 6)$, окружность касается гипотенузы треугольника, поэтому внутри треугольника ABC оказывается половина круга.

Искомая площадь равна площади треугольника без половины площади круга: $S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 15 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\sqrt{10}\right)^2 = \frac{75}{2} - 5\pi$.

7. [5 баллов] Найдите количество шестизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые две последовательные степени числа десять равна 1356.

Ответ: 180.

Решение. Пусть искомое число есть $\overline{abcdef}$ $(a \neq 0)$. Определим, какой может быть максимальная степень десятки, на которую происходит деление. Возможны несколько случаев.

- Если максимальная степень десятки 3 или меньше, то сумма остатков меньше $10^3 + 10^2$, что меньше 1356.
- Если максимальная степень десятки 6 или больше, то сумма остатков не меньше $a \cdot 10^5$, что больше 1356.
- Максимальная степень десятки равна 4 или 5. Эти случаи возможны.

1) Пусть максимальная степень десятки равна 4. Тогда остатки от деления на 10^4, 10^3 равны соответственно $\overline{cdef}$, $\overline{def}$. И сумма остатков есть $c \cdot 10^3 + 2S$, где $S = \overline{def}$, $0 \leqslant S < 1000$.

Рассмотрим уравнение $c \cdot 10^3 + 2S = 1356$. Так как $1356 < 2 \cdot 10^3$, то либо $c = 0$, либо $c = 1$. Если $c = 0$, то $2S = 1356$, откуда $S = 678$. То есть число имеет вид $\overline{ab0678}$. Таких чисел 90. Если $c = 1$, то $2S = 356$, откуда $S = 178$. То есть число имеет вид $\overline{ab1178}$. Таких чисел 90.

2) Пусть максимальная степень десятки равна 5. Тогда остатки от деления на 10^5, 10^4 равны соответственно $\overline{bcdef}$, $\overline{cdef}$. И сумма остатков есть $b \cdot 10^4 + 2S$, где $S = \overline{cdef}$, $0 \leqslant S < 10000$.

Рассмотрим уравнение $b \cdot 10^4 + 2S = 1356$. Это возможно только при $b = 0$. Значит, $2S = 1356$, откуда $S = 678$. То есть число имеет вид $\overline{a00678}$. Но эти числа уже посчитаны в случае 1.

Значит, искомое количество шестизначных чисел есть $90 + 90 = 180$.